PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. IX - N. 10
pag. 95-102

STRUTTURA INTRINSECA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO (*)

GIOVANNI GIORGI
Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Auctor, perpendens proprietates campi electromagnetici in spatio-tempore relativistico, pervenit ad conclusiones novas, quod attinet ad figuram geometricam intrinsecam, qua campus definitur et ad consectariorum relativisticorum coarctationem in omnibus spatii regionibus, in quibus campus electromagneticus extenditur.

1. – Per caratterizzare il campo elettromagnetico, si fa uso comunemente dei noti vettori, uno elettrico e uno magnetico. Ma sappiano che questi non sono elementi intrinseci riguardati nello spazio-tempo relativistico, sono componenti di entità intrinseche, prese relativamente a piattaforme speciali di riferimento.

Quali sono dunque le strutture intrinseche proprie del campo?

MINKOWSKI per rappresentare il campo ha dato una matrice $\|f_{rs}\|$, che ha denominato *Raum-Zeit Vektor 2-ter Art*, e questa denominazione allude già a un ente geometrico del cronòtopo; ma la sua trattazione è stata puramente analitica, e la figura geometrica è rimasta non descritta e non sono state dedotte le conseguenze. Gli autori successivi hanno sviluppato la stessa trattazione, denotando l'ente stesso come *sestivettore*: pregevole ed estesa, a questo riguardo è l'esposizione contenuta nel trattato di LAUE, che pure non si discosta dalla trama minkowskiana. Le denominazioni originali non devono venir conservate, perchè ora si usano in altro significato, e perchè potrebbero indurre in errore, per esempio, in quello che si tratti di un areale (un bivettore), altro ente a sei componenti nell'S_4; il che non è.

(*) Nota presentata il 19 luglio 1945.

La metrologia che hanno adoprato Minkowski e molti altri trattatisti, è quella abbreviata, ancor più sincopata di quella di Gauss-Hertz; perchè non solamente vengono identificate all'unità numerica le costanti ε_0, μ_0 dello spazio-etere, ma viene anche eguagliata ad uno la velocità della luce. Con questo si sopprime la differenza fra i due vettori elettrici **E** e **D**, e quella fra i due vettori magnetici **H** e **B**, e viene ad aversi un unico vettore elettrico $\boldsymbol{e} = \sqrt{\mathbf{DE}}$, e un unico vettore magnetico $\boldsymbol{m} = \sqrt{\mathbf{HB}}$; e questi due vettori, che elevati a quadrato dànno un'energia in un volume, finiscono per avere la stessa dimensione fisica, di carattere puramente meccanico. È sempre facile ridurre le formole complete a formole sincopate cancellando dei coefficienti e indicando con lo stesso simbolo due grandezze diverse; ma non è ugualmente facile, e si incontra ambiguità, quando si vuol fare il passaggio inverso, che è necessario per tradurre in valori pratici i risultati.

In quanto segue farò uso della metrologia moderna, completa, che riconosce una dimensione fisica *sui generis* alle grandezze elettromagnetiche. Le relazioni che sto per esporre varranno ugualmente per lo spazio libero e per un dielettrico ideale riguardato macroscopicamente, ma terrò presente solo il primo dei due casi. Pur distinguendo, anche nello spazio libero, **E** da **D** ed **H** da **B**, come grandezze fisiche di natura diversa, farò uso occasionale dei vettori sincopati $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{m}$, in qualche formola di passaggio [1]. Con queste notazioni, procedo a riscrivere le formole di Minkowski, e ricavare la figura geometrica corrispondente alla matrice $\|f_{rs}\|$, e metterla in relazione con le grandezze effettivamente osservabili.

2. – Cominciando a fare uso dei vettori sincopati $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{m}$, e dello spazio euclideo con una componente immaginaria avente:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict\ ,$$

[1] Per le notizie e discussioni sopra le diverse metrologie, e sul modo di definire le diverse grandezze del campo, mi riferisco a quanto ho scritto sotto il titolo *Grandezze e Unità Elettriche*, «Memorie della Reale Accademia d'Italia», Classe di scienze fisiche, vol. VIII (aprile 1937), estratto n. 7, pag. 319-396.

formiamo la matrice $\|f_{rs}\|$ così

$$f_{11}=f_{22}=f_{33}=f_{44}=0$$

$$f_{23}=m_x=-f_{32}\,;\quad f_{31}=m_y=-f_{13}\,;\quad f_{12}=m_z=-f_{21}$$

$$f_{14}=-ie_x=-f_{41}\,;\quad f_{24}=-ie_y=-f_{42}\,;\quad f_{34}=-ie_z=-f_{43}$$

La matrice è antisimmetrica e definisce un tensore intrinseco nello S_4 euclideo; denotiamo con

$$\Phi=\|f_{rs}\|$$

tanto la matrice quanto il tensore, o la trasformazione lineare che da esso deriva.

Dalla teoria delle matrici sappiamo che una Φ antisimmetrica in un S_4 euclideo è dello stesso tipo di quella che ivi definirebbe un generale atto di moto rigido a origine fissa; cioè essa matrice applicata ai vettori di posizione dei singoli punti, darebbe le loro velocità in un tale atto di moto. Sappiamo pure che un tale moto, quando è del tipo più generale, consiste in due simultanee velocità di rotazione ω_1, ω_2 in due giaciture, fra loro iperortogonali (cioè tali che ogni direzione giacente nell'una è ortogonale a ogni direzione giacente nell'altra). La figura geometrica della Φ è così trovata: si tratta di una coppia di piani iperortogonali uscenti dall'origine, e di due grandezze scalari associate a questi piani; si ha così uno speciale covariante o invariante geometrico, e due invarianti scalari.

L'esistenza dei due invarianti scalari era già stata additata da Minkowski, senza però alcun accenno alla figura geometrica. Per trovarli con un metodo diretto, basta scrivere l'equazione caratteristica di Cayley a cui la Φ deve soddisfare identicamente

$$\Phi^4+Q\Phi^2+P^2=0$$

dove Q è la somma dei determinanti minori principali di secondo ordine, cioè

$$Q=f^2_{12}+f^2_{24}+f^2_{13}+f^2_{23}+f^2_{14}+f^2_{34}$$

mentre P^2 è il determinante della matrice, a sua volta uguale al quadrato del « pfaffiano », che è

$$P = f_{12} f_{34} + f_{13} f_{42} + f_{14} f_{23} .$$

Questi due P, Q formano una coppia di invarianti razionali, equivalente alla coppia dei due invarianti non razionali, ω_1, ω_2 già menzionati. Volendo ricavare questi ultimi esplicitamente, non vi è che da sostituire un'incognita scalare $i\omega$ in luogo della Φ nell'equazione caratteristica. Quindi

$$\omega^4 - Q\omega^2 + P^2 = 0$$

donde

$$\left.\begin{matrix} \omega_1{}^2 \\ \omega_2{}^2 \end{matrix}\right\} = \frac{Q}{2} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{4} - P^2}$$

risultato di cui in questa Nota non avremo però occasione di fare uso.

Per avere una rappresentazione visibile, pensiamo all'iperpiano all'infinito, o, ciò che è lo stesso, alla stella entro cui opera la Φ. L'uno e l'altro equivalgono a un S_3 ellittico, entro cui la Φ, rappresentativa di un atto di moto rigido generico, definirebbe un *motore*, di quelli studiati da Clifford; quindi equivalgono anche a una coppia di rette, coniugate rispetto all'assoluto, con due scalari associati alle medesime; sono le rette che, proiettate dall'origine dell'S_4 dànno i due piani iperortogonali.

Gli autori, studiando l'insieme $\|f_{rs}\|$ dal punto di vista puramente analitico, hanno menzionato un caso singolare. In realtà, se ne possono verificare due: uno di degenerescenza di prima specie quando $P=0$, il che porta di conseguenza l'annullarsi di uno dei due ω, l'altro, di degenerescenza di seconda specie, quando $P=0$, $Q=0$ simultaneamente; questo secondo è il caso singolare menzionato dagli autori. Vedremo più oltre a quali relazioni fisiche corrispondono i due casi.

3. – A questo punto si deve proseguire passando al cronòtopo reale, e ai vettori fisici.

Conservando da principio i vettori sincopati, la matrice, nel cronòtopo $Oxyzt$, soppresso il coefficiente immaginario i, che più non ci occorre, e soppresso il segno meno nell'ultima colonna, diviene:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & m_z & -m_y & e_x \\ -m_z & 0 & m_x & e_y \\ m_y & -m_x & 0 & e_z \\ e_x & e_y & e_z & 0 \end{array} \right\|$$

Qui i piani che si descrivevano come iperortogonali nell'S_4 euclideo, divengono nell'$Oxyzt$ pseudoeuclideo, due piani coniugati rispetto all'ipercono assoluto. Per trovarli facciamo una scelta particolare del quadriedro normale di riferimento, in modo da far coincidere Oxy con uno di essi piani, Ozt con l'altro. Nella matrice, restano solo m_x, e_z così:

$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & m_z & 0 & 0 \\ -m_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_z \\ 0 & 0 & e_z & 0 \end{array} \right\|$$

Ciò equivale a scegliere una piattaforma di riferimento tale che il vettore elettrico e il vettore magnetico risultino sovrapposti fra loro. Questo è sempre possibile quando la matrice non è degenere di seconda specie, perchè col cambiamento di piattaforma, cioè con l'imprimere al sistema di riferimento un moto opportuno, si fanno nascere i termini *mozionali* (la forza elettrica indotta data dal vettorprodotto del vettore magnetico e della velocità di trascinamento, e la duale forza magnetica indotta), i quali aggiungono o sottraggono componenti ortogonali ai vettori del campo.

Con la scelta di tale piattaforma K_0 abbiamo ridotti i vettori $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{m}$ ad essere paralleli secondo una direzione che viene assunta come asse Oz. Il piano spaziale Oxy normale (nel senso ordinario, euclideo) a quell'asse è uno dei piani privilegiati che si ricercano; l'altro è il piano coniugato a questo, cioè un piano spazio-temporale Ozt, che taglia l'ipercono assoluto in due generatrici. La piattaforma K_0 non è unica, perchè ad essa si può imprimere un qualunque moto traslatorio secondo

Oz senza che i due vettori del campo si alterino; vi è un sistema ∞^1 di tali piattaforme: a tutte queste corrisponde lo stesso Oxy, ma passando da una all'altra varia Ot, che costituisce la linea oraria della piattaforma, e conseguentemente anche Oz (varia, in quanto si inclina verso Ot, ma spazialmente resta lo stesso); e questi due assi percorrono quel piano spazio-temporale che è stato denominato con Ozt.

4. – Passando ora alla metrologia completa, non abbreviata, con quattro vettori $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}$, le conclusioni relative all'invariante geometrico non esigono di essere formulate diversamente, perchè $\mathbf{E}$ è sempre sovrapposto a $\mathbf{D}$, e similmente $\mathbf{H}$ è sovrapposto a $\mathbf{B}$.

La matrice viene a essere composta così

$$\left\|\begin{matrix} 0 \; ; & \sqrt{\mu_0}\, H_z \; ; & -\sqrt{\mu_0}\, H_y \; ; & \sqrt{\varepsilon_0}\, E_x \\ -\sqrt{\mu_0}\, H_z \; ; & 0 \; ; & \sqrt{\mu_0}\, H_x \; ; & \sqrt{\varepsilon_0}\, E_y \\ \sqrt{\mu_0}\, H_y \; ; & -\sqrt{\mu_0}\, H_x \; ; & 0 \; ; & \sqrt{\varepsilon_0}\, E_z \\ \sqrt{\varepsilon_0}\, E_x \; ; & \sqrt{\varepsilon_0}\, E_y \; ; & \sqrt{\varepsilon_0}\, E_z \; ; & 0 \end{matrix}\right\|$$

Gli invarianti prendono queste espressioni

$$icP = E_x H_x + E_y H_y + E_z H_z$$

$$Q = HB - ED$$

Dunque un invariante è il prodotto scalare della forza elettrica e della forza magnetica di campo; l'altro è il doppio della differenza fra energia magnetica ed energia elettrica contenute nell'unità di volume. La degenerescenza di prima specie si verifica quando i due vettori $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ sono ortogonali fra loro. Pel fatto che il loro prodotto scalare è invariante, tale ortogonalità permane con qualunque cambiamento di piattaforma; ma si può trovarne una speciale (anzi ∞^1 speciali) nelle quali uno dei due vettori si annulli; e infatti fisicamente è palese, che quando si abbiano $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, ortogonali, qualunque moto di traslazione ortogonale ad entrambi, fa incrementare uno dei due vettori a spese dell'altro. Però, siccome un altro invariante è la differenza fra energia elettrica ed energia magnetica, due casi diversi si presentano secondo che l'una o l'altra è prevalente; se prevale l'energia elettrica, si può con una velocità traslatoria finita normale al piano di **E** e di **H** arrivare ad una piattaforma in cui esiste solo il vettore elettrico **E**, mentre con nessuna velocità minore di c si ottiene l'effetto reciproco. Se invece prevale l'energia magnetica, si arriva a una piattaforma in cui esiste solo **H**. In entrambi i casi, ottenuta la piattaforma nella quale vi è un vettore di campo unico, tutto prosegue come nel caso non degenere; cioè scelta la direzione di quel vettore come asse Oz, si ha nel piano perpendicolare Oxy uno dei due piani privilegiati; e tutte le infinite piattaforme che differiscono per una velocità di traslazione lungo Oz godono in comune delle stesse proprietà, perchè passando da una all'altra il vettore di campo non si altera.

Il caso limite fra quei due, nei quali prevale rispettivamente l'energia elettrica o quella magnetica, è quello della degenerescenza di seconda specie, cioè dei due invarianti entrambi nulli. I vettori **E**, **H** sono allora non solamente ortogonali, ma portano uguali quantità di energia, e ciò in qualunque piattaforma; e la riduzione a un vettore solo non è possibile. Questo è il caso che si verifica nelle così dette onde elettromagnetiche pure, come quelle della radiazione solare, e in generale tutte quelle che sono pervenute lontane dalla loro sorgente.

L'elemento geometrico associato al campo degenera anch'esso in questo caso, ma non scompare.

5. – Una conseguenza notevole risulta da tutta questa analisi.

Ricordiamo che nello spazio vuoto, e in assenza di campo elettromagnetico, il principio di relatività consiste in questo, che in una plaga galileiana, o in una cellula galileiana dello spazio-tempo, fra le ∞^3 piattaforme inerziali (le quali differiscono l'una dall'altra per un arbitrario moto di traslazione uniforme) non ve n'è alcuna privilegiata, non vi è modo di distinguere una da un'altra. Questa proprietà è stata generalmente enunciata senza mettere in evidenza la restrizione per le piattaforme inerziali, quantunque dalle equazioni di Einstein della seconda relatività e dai risultati dell'esperimento la restrizione risulti. Ora constatiamo che occorre dire di più: in presenza di campo elettromagnetico, vi è un insieme privilegiato di ∞^4 piattaforme, il quale insieme è individuato dal campo: quindi *il campo elettromagnetico restringe in un certo senso la relatività.*

È ovvio che in presenza di materia ordinaria la relatività è contrastata dal fatto che una piattaforma privilegiata singola, valevole per certi fenomeni, ovviamente esiste, quella attaccata localmente alla materia stessa. Il campo elettromagnetico ha dunque un carattere intermedio fra quello dello spazio libero neutro (cioè privo di campo) e quello della materia ordinaria; perchè ivi si può individuare una piattaforma privilegiata determinata a meno di un parametro arbitrario. Le conseguenze di questa constatazione possono condurre molto lungi.

Osservazione. – Dicendo degenerescenza di prima e di seconda specie, non s'intende di significare degenerescenza semplice e doppia. In entrambi quei due casi la matrice è degenere doppiamente, e non più che doppiamente, perchè fa perdere due dimensioni allo spazio a cui viene applicata quale trasformazione affine.